

Parallelität und Orthogonalität

Aufgaben

2001/I, Parallelität Orthogonalität

1. Erläutern Sie Möglichkeiten, die Orthogonalität und die Parallelität von Geraden in der Ebene zu definieren!
2. Beschreiben Sie Themen aus dem Geometrieunterricht der Hauptschule, in denen die Begriffe Parallelität und Orthogonalität eine wichtige Rolle spielen!
3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit für die 5. Jahrgangsstufe, in welcher die Orthogonalitätsrelation eingeführt wird!
4. Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks.

1995/I,1 Parallelität

1. Erläutern Sie verschiedene Möglichkeiten, die Parallelität zweier Geraden in der Ebene zu definieren!
2. a) Beschreiben und diskutieren Sie verschiedene unterrichtliche Möglichkeiten, durch einen Punkt P außerhalb einer Geraden g in der Ebene eine Parallele zu g zu zeichnen!
b) Erörtern Sie, warum Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der Hauptschule sinnvoll sind!
3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Einführung der Parallelität von Geraden!
4. a) Erläutern Sie Zusammenhänge zwischen den Relationen "ist parallel zu" und "ist senkrecht zu" zwischen Geraden in der Ebene!
b) Formulieren und beweisen Sie die Sätze über Stufen-, Wechsel- und Ergänzungswinkel an parallelen Geraden!

Grundsätzliches Wissen

Parallelität

Zwei Geraden sind genau dann parallel zueinander, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie gleich sind.

Zeichen: $g \parallel h$

Euklidisches Parallelenaxiom

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P , der nicht zu g gehört, gibt es genau eine Gerade h , die zu g parallel ist und zugleich durch P geht.

Relation „... ist parallel zu ...“ :

- Jede Gerade g ist zu sich selbst parallel, d. h. stets gilt $g \parallel g$.
- Wenn g parallel zu h ist, dann ist stets auch h parallel zu g .
- Wenn $g \parallel h$ und $h \parallel k$, so ist stets auch $g \parallel k$.

Die Richtung einer Geraden

Die Richtung einer Geraden g ist die Menge aller zu g paralleler Geraden.

Zeichen: $R(g) = \{h: h \parallel g\}$

Parallele Geraden haben die gleiche Richtung. Haben zwei Geraden verschiedene Richtungen, so schneiden sie einander in einem Punkt.

Orthogonalität – Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene

Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene

Für zwei Geraden g und h gilt:

- g und h haben genau einen Punkt gemeinsam
- g und h schneiden einander

Haben zwei Geraden verschiedene Richtungen, so schneiden sie einander in einem Punkt.

Zueinander senkrechte Geraden

Ein Sonderfall für Geraden verschiedener Richtung sind zueinander senkrechte Geraden. Zwei Geraden g und h heißen senkrecht zueinander (orthogonal) genau dann, wenn sie sich unter einem rechten Winkel schneiden.

Zeichen: $g \perp h$

Die Relation „... ist senkrecht zu ...“ wird hier auf den rechten Winkel zurückgeführt. Es ist ebenso möglich, diese Relation mithilfe der Geradenspiegelung zu erklären:

Zwei Geraden sind zueinander senkrecht genau dann, wenn sie sich schneiden und eine Gerade bei Spiegelung an der anderen Geraden auf sich selbst abgebildet wird.

Für die Relation „... ist senkrecht zu ...“ zwischen Geraden gilt:

- Wenn g senkrecht zu h ist, dann ist stets auch h senkrecht zu g .
- Wenn $g \perp h$ und $h \perp k$, so ist stets $g \parallel k$.

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade h , die zu g senkrecht ist und durch P geht.

Lot und Waagerechte

Die Strecke PL , die auf der Senkrechten zu g durch den Punkt P liegt, heißt das Lot von P auf g . L heißt Lotfußpunkt. Hier besteht ein Unterschied zur Umgangssprache:

Die mathematische Relation „... ist senkrecht zu ...“ beschreibt die Beziehung zwischen zwei Geraden, was nicht notwendigerweise bedeutet, dass von zwei zueinander orthogonalen Geraden eine „senkrecht nach unten“ weist.

Die Begriffe „lotrecht“ (umgangssprachlich wird dafür oft auch senkrecht benutzt) und „waagrecht“ beschreiben demgegenüber Eigenschaften einzelner Geraden. So heißt eine Gerade lotrecht, wenn sie durch den Massemittelpunkt der Erde verläuft, also gewissermaßen „senkrecht“ zur Erdoberfläche ist. Der Begriff „lotrecht“ weist auf das Lot,

ein an einer Schnur befestigtes Massstück, als Mittel zur Überprüfung dieser Eigenschaft hin.

Eine Gerade heißt waagrecht, wenn sie „parallel“ zur als Ebene idealisierten Erdoberfläche verläuft. Der Begriff waagrecht weist auf die zur Überprüfung oft benutzte Wasserwaage hin. Waagerechte und lotrechte Geraden sind senkrecht zueinander.